Trabalho 01 - Introdução à Análise Real

Professora: Sarita de Miranda Rimes

Aluno: Kauan Peçanha Lira

Questão 01 - O que significa dizer que R (o conjunto dos números reais) é um corpo? Descreva as operações que forem citadas e seus axiomas.

Resposta: Dizer que o conjunto dos números reais implica que este mesmo conjunto deve respeitar uma série de condições relacionadas com duas propriedades matemáticas fundamentais, ditas: adição e multiplicação. Tais condições são ditas “Axiomas”, e podem ser vistas abaixo todas aqueles que devem ser respeitados de forma que entenda-se o conjunto R como um corpo:

**Associatividade:** Este axioma define que a ordem em que as operações ocorrem não interfere no resultado final, de forma que tais operações possam ser formalizadas em expressões. Um exemplo pode ser visualizado abaixo:

a \* (b \* c) = (a \* b) \* c

**Comutatividade:** Este define que a ordem em que os fatores são reorganizados dentro do contexto de ambas as operações não interfere no resultado final. Um exemplo disso pode ser visualizado abaixo:

a + b = b + a ; a x b = b x a

**Elementos Neutros:** Este axioma define que existem dois números dentro do conjunto dos números reais que desempenham um papel específico dentro do contexto do produto (multiplicação) dos mesmos. Tais números são 0 e 1, e sua aplicação pode ser visualizada no exemplo abaixo:

x \* 0 = 0 ; x \* 1 = 1 para todo x pertencente aos Reais

**Inversos:** Este define que existem números de igual módulo, mas inversos em questão de sinal, que respeitam as operações definidas abaixo:

a + ( - a ) = 0 ; a \* ( a ^ -1 ) = 1 para todo x pertencente aos reais

**Distribuitividade:** Este axioma define que a operação de multiplicação entre dois fatores estes que são, respectivamente um fator e uma soma de dois fatores resultaria na soma das multiplicações do primeiro com cada um dos dois fatores da soma. Tal operação pode ser melhor visualizada no exemplo abaixo:

a \* ( b + c ) = (a \* b) + (a \* c)

Logo, é isso o que quer ser dito quando é mencionado o fato do conjunto dos números reais ser um corpo.

Questão 02 - O que significa dizer que R (o conjunto dos números reais) é um corpo ordenado? Descreva as condições as quais R+ cumpre.

Resposta:

Primeiro, deve-se considerar que o conjunto dos números reais detém um subconjunto representado por R+, que é nomeado conjunto dos números reais positivos, que respeita às seguintes condições:

P1: A soma e o produto de números reais resultam em números reais positivos. Matematicamente:

x, y e R+ => x + y e R+ e x . y e R+

P2: Dado x e R, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre:

x = 0, ou x e R+, ou -x e R+

Questão 03 - Sabemos que, se y - x e R, então x < y. Descreva as propriedades provenientes dessa relação.

Resposta:

De tal forma, implica-se que y - x resulta em um número real que pertence ao subconjunto dos números reais positivos. Dessa relação, é possível citar as seguintes propriedades:

1. **Transitividade:** Considere que há três números reais x, y e z tais que x < y e y < z. Dessa forma, é possível concluir que x < z. Um exemplo dessa propriedade são os números 1, 2 e 3. 1 é menor que 2, e 2, por sua vez, é menor que 3. Logo, é possível propor que 1 é menor que 3, o que se faz uma proposição verdadeira.
2. **Tricotomia:** Há três possibilidades na qual, sempre, apenas uma está correta, dados dois números reais. A essas três possibilidades, são denominadas unicamente por Tricotomia, e são elas:

1. x = y
2. x < y
3. x > y

Os exemplos de cada uma das mesmas se encontram abaixo:

1. 1 = 1
2. 1 < 2
3. 3 > 2

1. **Monotonicidade da Adição**: Se x < y, então para todo z e R, tem-se x + z < y + z. Essa propriedade implica que a adição de dois números por outro não altera a validade da relação “menor que”. Um exemplo disso pode ser visualizado abaixo:

1 < 2 => 1 + 2 < 2 + 2

O que se prova ser uma relação válida e correta.

1. **Monotonicidade da multiplicação:** Essa propriedade é semelhante à terceira, de forma que dado uma desigualdade x < y, caso ocorra o produto de tais números reais por um terceiro, a desigualdade se mantém válida, sendo ela x . z < y . z . Entretanto, diferentemente da terceira, isso somente é válido para o caso de z ser um real positivo. Caso ele seja o seu oposto, ou seja, um real negativo, a natureza dessa desigualdade também se alteraria, uma vez que os números reais negativos estão sujeitos a uma ordem decrescente de grandeza, sendo o maior de todos, -1. Dessa forma, essa propriedade pode ser representada pelo exemplo abaixo:
   1. 1 < 2 => 1 . (2) < 2 . (2)
   2. 1 < 2 => 1 . (-2) > 2 . (-2)

Questão 04 - O que é um intervalo degenerado?

Resposta:

Um intervalo degenerado nada mais é do que um intervalo composto por um único elemento. Ou seja, matematicamente representado por [a,a]. Dessa forma, seu número de elementos é um.

Questão 05 - O que significa dizer que R (o conjunto dos números reais) é um corpo ordenado completo? Descreva detalhadamente todos os termos citados na sua resposta.

Resposta:

Conceitos abordados:

* Conjunto limitado superiormente
* Conjunto limitado inferiormente
* Supremo do conjunto
* Ínfimo do conjunto
* Corpo ordenado completo

**Conjunto limitado superiormente**

Um conjunto limitado superiormente é um conjunto X tal que há um número b real tal que para todo x pertencente a X, x <= b. Ou seja, se houver um ou mais elementos que sejam maiores que todos os elementos pertencentes a tal conjunto, logo, trata-se de um conjunto limitado superiormente. Tais números são chamados de cotas superiores.

**Conjunto limitado inferiormente**

Um conjunto limitado inferiormente, de forma semelhante à definição acima, é o mesmo conceito, entretanto, de forma que há um ou mais elementos que para todo x e X, x <= a, sendo este um número real. Tais números são chamados de cotas inferiores. Um exemplo desse conceito pode ser visto abaixo.

X = {1, 2, 3}

b pode ser 3, 4, 5, 6…

a pode ser 1, 0, -1, -2….

Logo, pode-se concluir que o conjunto acima é um conjunto limitado tanto superior quanto inferiormente.

**Supremo do conjunto**

É dito supremo de um conjunto o elemento que for a menor das cotas superiores de um conjunto. Segue o exemplo abaixo:

X = {1, 2, 3}

3 = sup(X); 3 < 3,1; 3 < 3,01; 3 < 4; …

**Ínfimo do conjunto**

É dito ínfimo de um conjunto o elemento que for a maior das cotas inferiores de um conjunto. Segue o exemplo abaixo:

X = {1, 2, 3}

1 = inf(X); 1 > 2,9; 1 > 2,99; 1 > 2; …

**Corpo ordenado completo**

A definição de um conjunto que seja um corpo ordenado completo é: “um conjunto não vazio, limitado superiormente, x c R possui supremo b = sup(X) e R”. Esta definição tem sua importância por ser um conceito que difere o conjunto dos números reais dos racionais. Sua explicação pode ser vista abaixo:

Tome o conjunto abaixo:

X = {x e Q | x >= 0 e x² < 2} c Q

Logo, o conjunto X é composto por todos os elementos do conjunto dos racionais que estejam no intervalo fechado em 0 e aberto em raiz de 2.

Primeiro, pode-se concluir que trata-se de um conjunto não-vazio, uma vez que detém elementos em sua composição.

Em segundo lugar, ele é limitado superiormente por várias cotas superiores, partindo de raiz de 2.

Entretanto, entende-se que tal subconjunto não detém supremo, uma vez que ele deve ser composto somente por números racionais, e raiz de 2 é um número irracional. Por isso, o conjunto dos números racionais trata-se de um corpo ordenado, mas não um corpo ordenado completo.

Tomando, agora, o exemplo abaixo:

X = {x e R | x >= 0 e x² < 2} c R

Diferentemente do primeiro exemplo, agora, este subconjunto detém, sim, supremo, sendo ele raiz de 2, um número irracional e real.

Tendo ele supremo, pode-se afirmar que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

Questão 06 - Demonstre que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Primeiro, deve-se partir do conceito do que são os números reais, no que tange aos conjuntos matemáticos.

O conjunto dos números reais é um conjunto tal que é formado pela união entre o conjunto dos números racionais e seu complemento, ou seja, a diferença entre R e Q. Isso pode ser representado abaixo:

R = Q U (R - Q)

A essa diferença, dá-se o nome de conjunto dos números irracionais, sendo ele formado por todas as dízimas não periódicas.

R = Q U I

Para essa demonstração, vamos primeiro tomar como verdade que o conjunto dos reais seja não enumerável. Logo, para que essa proposição seja verdade, pelo menos um dos conjuntos da união, se não ambos, devem ser não enumeráveis também. Logo, o próximo passo é definir a cardinalidade de cada um deles.

**Conjunto dos Racionais é um conjunto enumerável**

Para isso, deve-se partir do Argumento Diagonal de Cantor.

O primeiro passo é a construção de uma lista como a mencionada abaixo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | a |
| 1 | 1/1 | 2/1 | a/1 |
| 2 | 1/2 | 2/2 | a/2 |
| b | 1/b | 2/b | a/b |

Sendo a e b números genéricos representativos dos números naturais.

Posteriormente, deve-se concluir que absolutamente todos os números racionais puderam ser representados nesta lista, uma vez que nenhuma fração deixou de ser representada, de forma que todas as possibilidades de numerador e denominador foram amplamente cobertas por esta tabela.

Por fim, deve-se lembrar que o conjunto dos números naturais é um conjunto enumerável. E como essa tabela estabelece uma relação entre os naturais, logo, o conjunto dos números racionais também é enumerável. Isso se mostra verdadeiro, uma vez que propor que tal conjunto seja não enumerável compõe um absurdo, de forma que não se pode ter um conjunto não enumerável, partindo de outro que seja enumerável.

Logo, fica provado que o conjunto dos racionais é enumerável.

**Conjunto dos Irracionais é um conjunto não enumerável**

Por si somente, a prova acima já seria o suficiente para atestar que o conjunto dos reais é não enumerável, pois denuncia que o conjunto dos irracionais é não enumerável. Entretanto, ela ainda não é suficiente para atestar a verdadeira natureza deste conjunto, pois a primeira proposição foi tomada como verdade. Desta forma, segue abaixo a explicação da não-enumerabilidade do conjunto dos irracionais.

Tome o seguinte subconjunto dos reais, abaixo:

[0, 1]

Tome, agora, que sejam feitas tentativas de se fazer uma lista que contenha todos os números deste conjunto, racionais e irracionais.

0, a\_11 a\_12, a\_13 … a\_1n

0, a\_21 a\_22 a\_23 … a\_2n

0, a\_31 a\_32 a\_33 … a\_3n

.

.

.

0, a\_m1 a\_m2 a\_m3 … a\_mn

Observação: cada linha é composta por um número decimal, e cada elemento simbolizado pela letra a é um algarismo.

Tendo essa suposta lista contendo todos os reais, tem-se, agora e abaixo, um novo elemento que não foi previsto na lista acima.

0, não a\_11 não a\_22 não a\_33

Como esse processo pode ser repetido indefinidamente, e em todas as tentativas, pode-se descobrir números novos, logo, os reais de fato são não-enumeráveis.

Por esse motivo, a formação de um conjunto não-enumerável outro enumerável e outro de natureza desconhecida (os irracionais), o obriga a ser um conjunto também não-enumerável, ficando assim provado a não enumerabilidade dos irracionais.

Essa solução foi exposta por Ledo Vaccaro em seu vídeo Pitágoras e os Irracionais.

Questão 07 - Demonstre que uma sequência pode não convergir para dois limites distintos.

Solução:

Tome que Lim f(x) = A, e ao mesmo tempo, que Lim f(x) = B, sendo A < B.

Paralelamente, pela definição de Limite, tome um número qualquer , de tal forma que sejam:

Assim:

Tomando, agora:

Tem-se, agora, que:

Sendo o definido abaixo:

Assim:

O que é configurado como um absurdo, uma vez que como poderia um valor ser ao mesmo tempo maior e menor que outro? Não poderia. E por isso, a única alternativa que resta é de que A e B sejam iguais, provando assim a unicidade do limite.

Questão 08 – Demonstre que toda sequência convergente é limitada.

Uma sequência limitada é uma sequência que detém alguma forma de limitação dentro de sua composição. Por exemplo, considerando uma sequência de intervalos reais e fechados, ela é ou limitada superiormente ou inferiormente ou ainda, ambas, uma vez que há pelo menos um elemento que seja respectivamente maior do que todos os seus elementos, e menor do que todos, da mesma forma.

Além disso, quando uma sequência tem limite definido, significa que seus termos, a medida que progridem, formam uma tendência de resultar em um único número, ainda que nunca resultem no mesmo. Um exemplo disso é a sequência formada abaixo:

Que como pode ser observado, tende a 0. Ao mesmo tempo, 1 é sua cota superior, e 0, sua cota inferior.

Entretanto, a “volta” não é verdadeira. A demonstração abaixo comprova isso:

Questão 09 – O que é uma sequência monótona? Descreva todos os tipos de sequência que forem citados na explicação.

Solução:

Uma sequência monótona é toda a sequência que atenda a alguma das condições abaixo:

- Monótona não-decrescente:

- Monótona não-crescente:

Ou seja, em tais sequências, ocorre que as cotas inferiores ou superiores são seus primeiros termos, respectivamente com as duas apresentadas acima.

Questão 10 – Demonstre que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Tome, por exemplo, a seguinte sequência abaixo:

A partir dela, pode-se tomar uma subsequência, como a abaixo:

A sequência apresentada inicialmente era superiormente limitada por (seu primeiro elemento), e inferiormente limitada por 0. De tal forma, foi possível extrair uma determinada subsequência de sua composição que pudesse ser convergente, como a denotada por . Logo, está provada a relação pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Questão 08 – Demonstre que toda sequência convergente é limitada.